Prof. Dr. Alfred Toth

Das merkwürdige Verhältnis von Semiotik und Logik

1. Die Diskussion darüber, ob die Semiotik (was Peirce beabsichtigte) die Logik begründe oder ob umgekehrt die Logik die Semiotik begründe (immerhin hatte Peirce eine trivalente Logik neben seiner triadischen Semiotik entwickelt), ist legendär. Meine in vielen Arbeiten veröffentlichten Ergebnisse haben gezeigt, dass die Logik klar „tiefer" liegt im Hilbertschen Sinne, denn sie kann, anders als die Semiotik, keine Qualitäten repräsentieren. Ferner liegt die Logik, wie die vielen Arbeiten zur Polykontexturalitätstheorie von Günther bis Kaehr gezeigt haben, viel näher bei der Keno- und Morphogrammatik als die Semiotik, denn die Proömialrelation ist direkt auf die Logik, nicht aber direkt auf die Semiotik anwendbar.

2. Im folgenden sei ein weiteres Argument dafür beigebracht, dass Logik und Semiotik im Grunde sogar sehr wenig miteinander zu tun haben. Da man sämtliche 16 dyadischen logischen Funktoren auf die Konjunktion plus Negation zurückführen kann, zeige ich anhand der Konjunktion zweier semiotischer Subzeichen und drei auf dem semiotischen Gruppenbegriff entwickelten semiotischen „Negationen" (Austauschrelationen), was herauskommt, wenn man logische Werte durch numerische Zeichen ersetzt. Dieses Vorgehen ist legitim, denn Kronthaler (1986) hatte behauptet, man komme zur Logik, wenn man die Kenostrukturen mit logischen Werten, zur Semiotik, wenn man sie mit Primzeichen, und zur Mathematik, wenn man sie mit natürlichen Zahlen besetze. Um das Ganze noch etwas interessanter zu gestalten, gehe ich aus von der in Toth (2011) eingeführten dyadisch-trivalenten Semiotik aus. Es gilt also

$ZR^* = ((a.b), (c.d))$ mit $a, ..., d \in \{1, 2, 3\}$.

3. Zunächst zeige ich, dass jede trivalente Semiotik (also auch die Peircesche, vgl. Toth 2006) drei abelsche Gruppen bildet.

3.1. Die semiotische Gruppe $(\{1, 2, 3\}, \circ_1)$

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_1 1 = 2$; $1 \circ_1 2 = 2 \circ_1 1 = 3$; $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$; $2 \circ_1 2 = 1$; $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$; $3 \circ_1 3 = 3$.

2. Assoziativität: $1 \circ_1 (2 \circ_1 3) = (1 \circ_1 2) \circ_1 3 = 2$; $2 \circ_1 (3 \circ_1 2) = (2 \circ_1 3) \circ_1 2 = 1$, $3 \circ_1 (3 \circ_1 1) = (3 \circ_1 3) \circ_1 1 = 1$, usw.

3. Einselement: $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$; $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$; $3 \circ_1 3 = 3$, d.h. $e = 3$.

4. Inverses Element: $1^{-1} = 2$, denn $1 \circ_1 2 = 3$; $2^{-1} = 1$, denn $2 \circ_1 1 = 3$; $3^{-1} = 3$ = const.

Es ist also: σ_1: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$.

3.2. Die semiotische Gruppe $(\{1, 2, 3\}, \circ_2)$

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_2 1 = 3$; $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $1 \circ_2 3 = 3 \circ_2 1 = 2$; $2 \circ_2 2 = 2$; $2 \circ_2 3 = 3 \circ_2 2 = 3$; $3 \circ_2 3 = 1$.

2. Assoziativität: $1 \circ_2 (2 \circ_2 3) = (1 \circ_2 2) \circ_2 3 = 2$; $2 \circ_2 (3 \circ_2 2) = (2 \circ_2 3) \circ_2 2 = 3$, $3 \circ_2 (3 \circ_2 1) = (3 \circ_2 3) \circ_2 1 = 3$, usw.

3. Einselement: $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $2 \circ_2 2 = 2$; $3 \circ_2 2 = 2 \circ_2 3 = 3$, d.h. $e = 2$.

4. Inverses Element: $1^{-1} = 3$, denn $1 \circ_2 3 = 2$; $2^{-1} = 2$ = const., $3^{-1} = 1$, denn $3 \circ_2 1 = 2$.

Es ist also: σ_2: $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$.

3.3. Die semiotische Gruppe $(\{1, 2, 3\}, \circ_3)$

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_3 1 = 1$; $1 \circ_3 2 = 2 \circ_3 1 = 2$; $1 \circ_3 3 = 3 \circ_3 1 = 3$; $2 \circ_3 2 = 3$; $2 \circ_3 3 = 3 \circ_3 2 = 1$; $3 \circ_3 3 = 2$.

2. Assoziativität: $1 \circ_3 (2 \circ_3 3) = (1 \circ_3 2) \circ_3 3 = 1$; $2 \circ_3 (3 \circ_3 2) = (2 \circ_3 3) \circ_3 2 = 2$, $3 \circ_3 (3 \circ_3 1) = (3 \circ_3 3) \circ_3 1 = 2$, usw.

3. Einselement: $1 \circ_3 1 = 1$; $2 \circ_3 1 = 1 \circ_3 2 = 2$; $3 \circ_3 1 = 1 \circ_3 3 = 3$, d.h. $e = 1$.

4. Inverses Element: $1^{-1} = 1 = \text{const.}$, $2^{-1} = 3$, denn $2 \circ_3 3 = 1$, $3^{-1} = 2$, denn $3 \circ_3 2 = 1$.

Es ist also: σ_3: $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$.

4. Wir verwenden nun σ_1, σ_2 und σ_3 als Negationen, d.h. semiotische Austauschrelationen. Als Beispiel stehe ZR* = ((1.3), (2.3)). Im folgenden behandeln wir also diese semiotischen „Werte“ wie logische und wenden die Reduktionsgesetze einiger logischer Funktoren auf die Konjunktion auf sie an.

4.1. Disjunktion

$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$

σ_1: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$

$(1.3) \vee (2.3) \equiv \neg(\neg(1.3) \wedge \neg(2.3)) = \neg((2.3) \wedge (1.3)) = ((1.3) \wedge (2.3))$

σ_2: $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$

$(1.3) \vee (2.3) \equiv \neg(\neg(1.3) \wedge \neg(2.3)) = \neg((3.1) \wedge (2.1)) = ((1.3) \wedge (2.3))$

σ_3: $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$

$(1.3) \vee (2.3) \equiv \neg(\neg(1.3) \wedge \neg(2.3)) = \neg((1.2) \wedge (3.2)) = ((1.3) \wedge (2.3))$

4.2. Implikation

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q = \neg(p \wedge \neg q)$

$(1.3) \rightarrow (2.3) \equiv \neg(1.3) \vee (2.3) = \neg((1.3) \wedge \neg(2.3))$

σ_1: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$

$(1.3) \rightarrow (2.3) \equiv \neg(1.3) \vee (2.3) = \neg((1.3) \wedge \neg(2.3)) = ((1.3) \wedge (2.3))$

σ_2: $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$

$(1.3) \rightarrow (2.3) \equiv \neg(1.3) \vee (2.3) = \neg((1.3) \wedge \neg(2.3)) = ((1.3) \wedge (2.3))$

σ_3: $2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$

$(1.3) \rightarrow (2.3) \equiv \neg(1.3) \vee (2.3) = \neg((1.3) \wedge \neg(2.3)) = ((1.3) \wedge (2.3))$

4.3. Replikation

$p \leftarrow q \equiv p \vee \neg q = \neg(\neg p \wedge q)$

σ_1: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$

$(1.3) \leftarrow (2.3) \equiv (1.3) \vee \neg(2.3) = \neg(\neg(1.3) \wedge (2.3)) = ((1.3) \wedge (2.3))$

σ_2: $1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$

$(1.3) \leftarrow (2.3) \equiv (1.3) \vee \neg(2.3) = \neg(\neg(1.3) \wedge (2.3)) = ((1.3) \wedge (2.3))$

σ_3: $2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$

$(1.3) \leftarrow (2.3) \equiv (1.3) \vee \neg(2.3) = \neg(\neg(1.3) \wedge (2.3)) = ((1.3) \wedge (2.3))$

4.4. Kontravalenz

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge q)))$

σ_1: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$

$(1.3) \leftrightarrow (2.3) \equiv ((1.3) \wedge (\neg(2.3) \vee (\neg(1.3) \wedge (2.3))) = ((1.3) \wedge (2.3))$

σ_2: $1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$

$(1.3) \leftrightarrow (2.3) \equiv ((1.3) \wedge (\neg(2.3) \vee (\neg(1.3) \wedge (2.3))) = ((1.3) \wedge (2.3))$

σ_3: $2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$

$(1.3) \leftrightarrow (2.3) \equiv ((1.3) \wedge (\neg(2.3) \vee (\neg(1.3) \wedge (2.3))) = ((1.3) \wedge (2.3))$

Bis hierher sieht es also so aus, als sei die Anwendung logischer Funktoren auf die Semiotik vollkommen sinnlos, denn, flapsig gesagt: es kommt überall dasselbe heraus. Bis hierher müssten wir also zum Schluss kommen, dass es keineswegs genügt, die Keno- und Morphogramme mit Prim-, Sub- oder vollständigen Zeichen zu belegen, um bereits eine Semiotik zu haben.

Schauen wir uns aber die Exklusion an:

4.5. Exklusion

$p \mid q \equiv \neg(p \wedge q)$

σ_1: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$

$(1.3) \mid (2.3) \equiv \neg((1.3) \wedge (2.3)) = ((2.3) \wedge (1.3))$

σ_2: $1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$

$(1.3) \mid (2.3) \equiv \neg((1.3) \wedge (2.3)) = ((3.1) \wedge (2.1))$

σ_3: $2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$

$(1.3) \mid (2.3) \equiv \neg((1.3) \wedge (2.3)) = ((1.2) \wedge (3.2))$

Die strukturellen Veränderungen unseres Ausgangsbeispieles

$((1.3), (2.3)) \rightarrow \{((2.3), (1.3)), ((3.1), (2.1)), ((1.2), (3.2))\}$ zeigt, dass man die logischen Funktoren offenbar auf die bereits in Toth (2011) eingeführten 3 folgenden semiotischen Basisoperatoren zurückführen kann:

1. $\odot((a.b), (c.d)) = ((b.a), (d.c))$

2. $\oplus((a.b), (c.d)) = ((c.d), (a.b))$

3. $\otimes((a.b), (c.d)) = \odot\oplus((a.b), (c.d)) = \oplus\odot((a.b), (c.d)) = ((d.c), (b.a))$

$\odot$ konvertiert also nur die Monaden, lässt die Dyaden also stehen.

$\oplus$ konvertiert nur die Dyaden, lässt aber die Monaden stehen.

$\otimes$ ist ein aus beiden zusammengesetzter Operator, wobei die Reihenfolge der Anwendung von $\odot$ und $\oplus$ belanglos ist.

Die auf die Semiotik angewandten gruppentheoretischen Ausauschrelationen lassen sich damit auf die beiden semiotischen Operatoren $\odot$ (Monadenkonversion) und $\oplus$ (Dyadenkonversion) sowie auf ihre Kombination ($\otimes$) zurückführen, wobei der Grenzfall der Austauschrelationen in der identitiven Relation liegt, d.h. dass die Anwendung logischer

Operatoren auf semiotische „Werte“ immer ein und dasselbe Ergebnis liefern – und zwar unabhängig vom Operator einerseits und auch unabhängig davon, welcher Austauschoperator („semiotische Negation“) benutzt wird. Keinesfalls bekommt man also durch simple Belegung von Kenogrammstrukturen mittels semiotischer Zeichenwerte eine Semiotik. Das Verhältnis von Kenogrammatik und Semiotik muss daher selbst vermittelt sein.

Bibliographie

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Einführung der dyadisch-trivalenten Semiotik. 10 Tle. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

19.4.2011